
LÖSUNGEN ZU
KONRAD KÖNIGSBERGER: ANALYSIS I

— KAPITEL 3 —

TIM KOPISCHKE
DEZEMBER 2020

Aufgabe 1 : ✓
Aufgabe 2 : ✓
Aufgabe 3 : ✓
Aufgabe 4 : ✓
Aufgabe 5 : ✓

Aufgabe 6 : ✓
Aufgabe 7 : ✓
Aufgabe 8 : ✓
Aufgabe 9 : ✓
Aufgabe 10 : ✓

Aufgabe 1

(a). $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

(b). $\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{4+1} = \frac{1}{5}(6+3i+8i+4i^2) = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$

(c). $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k = \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}(1+i)^{2k} = \frac{1}{2^k}(2i)^k = i^k.$

(d). Wir suchen eine komplexe Zahl $k = (a + bi)$ so, dass $k^2 = (a + bi)^2 = i$ gilt. Nach Ausmultiplizieren erhalten wir $(a^2 - b^2) + 2abi = i$ und somit nach Vergleich von Real- und Imaginärteil $a^2 - b^2 = 0$ sowie $2abi = i$. Es folgt, dass $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ und damit $k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).$ ■

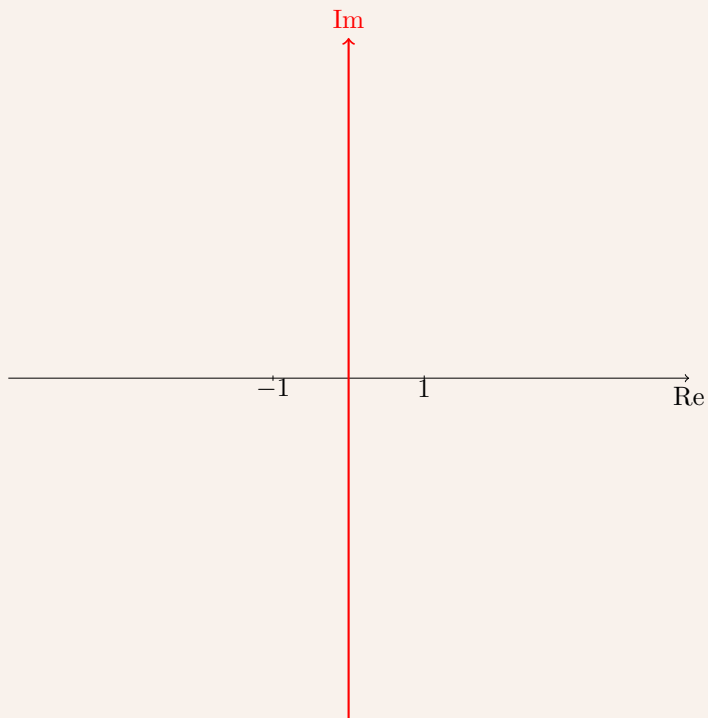
Aufgabe 2

Die erste Aussage steht so faktisch bereits im Text (p. 24) : $1 = |z| \implies 1 = |z|^2 \implies 1 = z\bar{z} \implies \frac{1}{z} = \bar{z}.$

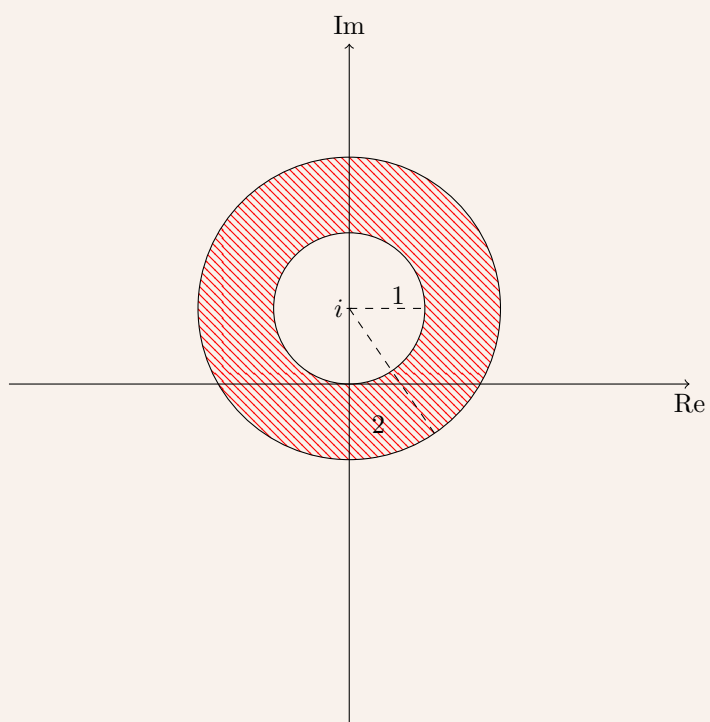
Die beiden weiteren Aussagen ergeben sich mit den Betragsregeln auf Seite 22 zu $|zw| = |z||w| = 1 \cdot 1 = 1 \implies |zw| \in S^1.$ Analog für $|\frac{z}{w}|.$ ■

Aufgabe 3

Die rot schraffierten Bereiche zeigen die gesuchten Flächen an.
(a).



(b).



(c).

Aufgabe 4

(a). Es gilt $|z| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$. Also $|z| - |w| \leq |z + w|$. Die analoge Argumentation für $|w| \leq |w + z|$ führt zur Behauptung.

(b). Man rechnet nach, dass

$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = z\bar{z} + 2 \cdot \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + w\bar{w}$
denn für $z = a + bi$ und $w = c + di$ gilt, dass

$$z\bar{w} = (a + bi)(c - di) = (ac + bd) + i(bc - ad) \quad (1)$$

und

$$\bar{z}w = (a - bi)(c + di) = ac + bd - i(bc + ad), \quad (2)$$

also $\bar{z}w + z\bar{w} = 2(ac + bd) = 2 \cdot \operatorname{Re}(z\bar{w})$.

Analog rechnet man nach, dass

$$|z - w|^2 = (z - w)\overline{(z - w)} = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} = z\bar{z} - 2 \cdot \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + w\bar{w}$$

In der Summe hat man deshalb

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(z\bar{z} + w\bar{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (3)$$

■

Aufgabe 5

Man kann die komplexen Zahlen z_1, z_2 und z_3 als Vektoren des $\mathbb{R}^2$ auffassen und die Ausgangsbedingung umformulieren zu

$$z_3 - r(z_2 - z_1) - z_1 = z_3 - rz_2 + (r - 1)z_1 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0 \quad (4)$$

mit $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -r$ und $\lambda_3 = (r - 1)$. Durch Vergleich mit der Definition von linearer Unabhängigkeit folgt, dass $\lambda_i \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und die Vektoren z_1, z_2 und z_3 nicht linear unabhängig sind. Das zeigt bereits, dass sie auf einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ liegen müssen.

■

Aufgabe 6

Es ist

$$z^6 = 1 \iff z^6 - 1 = 0 \iff (z^3 + 1)(z^3 - 1) = 0 \iff (z + 1)(z^2 - z + 1)(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \quad (5)$$

Mithilfe quadratischer Ergänzung sieht man, dass $z^2 - z + 1 = 0 \iff z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Zusammen mit den bereits auf Seite 25 gegebenen Nullstellen erhält man also insgesamt die sechs Nullstellen,

$$\zeta_1 = -1$$

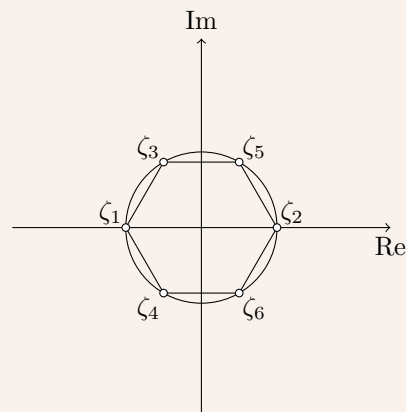
$$\zeta_2 = 1$$

$$\zeta_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$\zeta_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$



Es ist

$$1 = |\zeta_1 - \zeta_3| = |\zeta_1 - \zeta_4| = |\zeta_2 - \zeta_5| = |\zeta_5 - \zeta_2| = |\zeta_2 - \zeta_6| = |\zeta_4 - \zeta_6| \quad (6)$$

und somit bilden $\zeta_1, \dots, \zeta_6$ ein gleichseitiges Sechseck, vgl. auch die TikZ-Graphik.

■

Aufgabe 7

(a). Eine Faktorisierung der Gleichung ergibt

$$z^5 = 1 \iff z^5 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \iff (z-1)(z^2 + gz + 1)(z^2 - hz + 1) = 0$$

und somit erhalten wir die fünf Nullstellen

$$\zeta_1 = 1$$

$$\zeta_{2,3} = -\frac{g}{2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1} = \frac{1}{2}(-g \pm \sqrt{1 - g^2}i)$$

$$\zeta_{4,5} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - 1} = \frac{1}{2}(h \pm \sqrt{4 - h^2}i)$$

(b). Für diese Teilaufgabe sind folgende Zusammenhänge zur Wiederholung nützlich :

$$h^2 = 1 - h \implies h^2 = 2 - g$$

$$g^2 = 1 + g$$

$$g = 1 + h$$

$$h = g^{-1}$$

Sei also $\zeta = \frac{1}{2}(h + i\sqrt{4 - h^2})$. Dann rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \zeta \cdot \zeta = \frac{1}{4}(h^2 - (4 - h^2) + i(h\sqrt{4 - h^2} + h\sqrt{4 - h^2})) \\ &= \frac{1}{4}(2h^2 - 4 + 2h\sqrt{4 - h^2}i) \\ &= \frac{1}{2}(h^2 - 2 + h\sqrt{4 - h^2}i) \\ &= \frac{1}{2}(-g + \sqrt{4h^2 - h^4}) \end{aligned}$$

Wegen $4h^2 - h^4 = h^2(4 - h^2) = h^2(4 - (2 - g)) = h^2(2 + g) = (2 - g)(2 + g) = 4 - g^2$ haben wir dann aber insgesamt

$$\zeta^2 = \frac{1}{2}(-g + \sqrt{4 - g^2}) = \zeta_2 \quad (7)$$

Es ist $\zeta^2 = \frac{1}{2}(h^2 - 2 + (h\sqrt{4 - h^2}i))$. Also ist

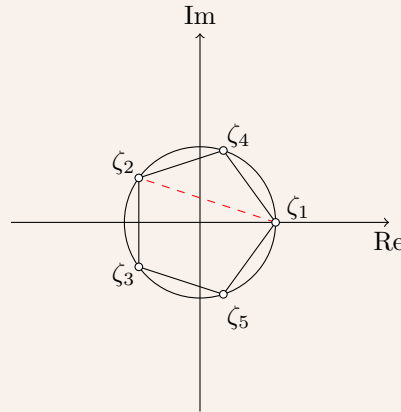
$$\begin{aligned} \zeta^3 &= \zeta^2 \cdot \zeta = \frac{1}{4}((h^2 - 2)h - h(4 - h^2)) + ((h^2 - 2)\sqrt{4 - h^2} + h^2\sqrt{4 - h^2})i \\ &= \frac{1}{4}(h^3 - 2h - 4h + h^3 + (h^2\sqrt{4 - h^2} - 2\sqrt{4 - h^2} + h^2\sqrt{4 - h^2})i) \\ &= \frac{1}{2}(h^3 - 3h + (h^2\sqrt{4 - h^2} - \sqrt{4 - h^2})i) \\ &= \frac{1}{2}(h(h^2 - 3) + \sqrt{4 - h^2}(h^2 - 1)i) \\ &= \frac{1}{2}(h(-g - 1) + \sqrt{4 - h^2}(-h)) \\ &= \frac{1}{2}(-h(1 + g) - \sqrt{4 - g^2}) \\ &= \frac{1}{2}(-hg^2 - \sqrt{4 - g^2}) \\ &= \frac{1}{2}(-g - \sqrt{4 - g^2}) \\ &= \zeta_3 \end{aligned}$$

Analog verfährt man für die übrigen Einheitswurzeln ζ_4 und ζ_5 .

(c). Es ist $|\zeta^k| = |\zeta|^k = \left|\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}i\sqrt{4-h^2}\right|^k = \left(\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}(4-h^2)\right)^k = 1^k = 1$ und damit

$$|\zeta_{k+1} - \zeta_k| = |\zeta^{k+1} - \zeta^k| = |\zeta^k(\zeta - 1)| = |\zeta^k||\zeta - 1| = |\zeta - 1| \quad \forall k \in \{1, \dots, 5\} \quad (8)$$

(d). Die rechnerische Herleitung der Lösung ist bereits ausführlich in Königsbergers Lösungen dokumentiert. Im Folgenden ist die Strecke $\zeta^2 - 1$ eingezeichnet.



■

Aufgabe 8

" $\implies$ " : Für einen Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$|z - a| = r \implies |z - a|^2 = r^2 \iff (z - a)(\overline{z - a}) = r^2 \iff z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a} - r^2 = 0 \quad (9)$$

Definiere $c := a\bar{a} - r^2$ und $b := a$. Dann ist $|b|^2 - 1 \cdot c = r^2 > 0$. Insgesamt kann also jeder Kreis in der komplexen Ebene in der angegebenen Form dargestellt werden.

Für eine Gerade in $\mathbb{C}$ hat man die Darstellung $sx + ty + u = 0$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $s, t, u \in \mathbb{R}$. Definiere $b := \frac{1}{2}(s + it)$. Dann ist

$$\begin{aligned} sx + ty + u &= \frac{1}{2}(sx + siy + txi + ty) + \frac{1}{2}(sx - siy + txi + ty) + u \\ &= \frac{1}{2}(s - it)(x + iy) + \frac{1}{2}(s + it)(x - iy) \\ &= \bar{b}z + b\bar{z} + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

und klarerweise $|b|^2 - 0 \cdot c = |b|^2 > 0$. Also kann jede beliebige Gerade ebenfalls in der dargestellten Form repräsentiert werden.

" $\impliedby$ " : Sei nun umgekehrt die dargestellte Gleichung gegeben. Dann kann diese geschrieben werden als

$$\begin{aligned} a|z|^2 + b\bar{z} + \bar{b}z + c &= 0 \iff |z|^2 + \frac{1}{a}b\bar{z} + \frac{1}{a}\bar{b}z + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \left|z + \frac{1}{a}b\right|^2 - \frac{1}{a^2}b\bar{b} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \left|z + \frac{1}{a}b\right|^2 = \frac{1}{a^2}(b\bar{b} - ac) \end{aligned}$$

Wenn man nun $z'_0 := -\frac{1}{a}b$ definiert und $r := \sqrt{\frac{1}{a^2}(b\bar{b} - ac)} > 0$ hat man einen Kreis mit Mittelpunkt z'_0 und Radius r .

Für $a = 0$ ergibt sich aber eine Gerade und da aus der Hinrichtung bekannt ist, dass $b := \frac{1}{2}(s + it) \iff 2t = s + it$ muss für $sx + ty + u = 0$ gelten, dass $s = 2\operatorname{Re}b$ und $t = 2\operatorname{Im}b$.

■

Aufgabe 9

Das Buch “Visual Complex Analysis” von Tristan Needham gibt in Kapitel 3 hervorragende visuelle Argumente für die nachfolgenden Resultate. Bezeichne I_K die Inversion bezüglich des Kreises K . Das Hauptresultat ist wie folgt :

Gerade durch Kreismittelpunkt. Falls L eine Gerade ist, die durch den Kreismittelpunkt des Kreises K verläuft, so ist $I_K(L) = L$. Das Bild einer Gerade unter Inversion ist also wieder eine Gerade wenn man annimmt, dass die Gerade durch den Kreismittelpunkt des Kreises verläuft in Bezug dessen man invertiert.

Gerade nicht durch Kreismittelpunkt. Falls L nicht durch den Kreismittelpunkt verläuft, dann bildet I_K die Gerade L auf einen Kreis ab, der durch den Kreismittelpunkt verläuft. Der Kreis hat den Durchmesser $|q - I_K(a)|$.

Kreis durch Kreismittelpunkt. Falls ein Kreis C durch den Kreismittelpunkt eines anderen Kreises K verläuft, so ist die Inversion bezüglich K gerade wieder eine Gerade L . Also gerade das umgekehrte Resultat. Wenn man eine Gerade als Kreis mit unendlichem Radius betrachtet, dann wird also auch dieser Kreis wieder auf einen Kreis abgebildet.

Kreis nicht durch Kreismittelpunkt. Falls ein Kreis C nicht durch den Kreismittelpunkt eines Kreises K verläuft, so bildet die Inversion den Kreis C in einen anderen Kreis ab, der ebenfalls nicht durch den Kreismittelpunkt von K verläuft.

Dies kann wie folgt nachgerechnet werden. Aus Aufgabe 8 ist bekannt, dass eine Gerade in $\mathbb{C}$ die Form $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ für $b, z \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{R}$ hat. Die Substitution $z = \frac{1}{w}$ gibt die neue Gleichung

$$\bar{b}\bar{w} + bw + cw\bar{w} = 0 \quad (10)$$

Falls $c = 0$, so ist das Bild eine Gerade durch den Ursprung. Falls $c \neq 0$, so ist die neue Gleichung

$$\bar{b}\bar{w} + bw + cw\bar{w} = c|w|^2 + \bar{b}\bar{w} + bw = 0 \quad (11)$$

und damit eine Kreisgleichung. Für die Kreisgleichung in $\mathbb{C}$ gibt eine analoge Substitution und Durchführung die anderen Resultate.

■

Aufgabe 10

Wenn man $a = m^2 + n^2 = |m + in|$ und $b = p^2 + q^2 = |p + iq|$ schreibt, dann folgt aus den Rechenregeln für komplexe Zahlen, dass

$$\begin{aligned} ab &= |m + in||p + iq| = |(m + in)(p + iq)| \\ &= |mp + miq + inp - nq| \\ &= |(mp - nq) + i(mq + np)| \\ &= (mp - nq)^2 + (mq + np)^2 \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. Diese Identität ist auch als Diophantus- oder Brahmagupta–Fibonacci-Identität bekannt.

■